क्या गणित आपको अन्धविश्वास सिखाता है ?

मुकेश मालवीय

शिक्षा तार्किक बनाती है, सवाल करना और पड़ताल करना सिखाती है। लेकिन कई बार किसी बात पर न सिर्फ़ आँख मूँदकर विश्वास कर लेने बल्कि उसका प्रचार-प्रसार करने की होड़ में हम तार्किकता को परे रख देते हैं। यह व्यवहार अफ़वाहों को हवा देने, अन्धविश्वास को बढ़ावा देने और उन्माद फैलाने जैसे चलन के लिए ज़िम्मेदार होते हैं। वैज्ञानिक चेतना वाला समाज बनाने का शिक्षा का व्यापक लक्ष्य इस व्यवहार से प्रभावित होता है। प्रस्तुत आलेख में मुकेश मालवीय ने एक व्हाट्सएप मैसेज के हवाले से इस व्यवहार पर समालोचनात्मक टिप्पणी करते हुए एक कथित चमत्कारी संख्या की गणितीय पड़ताल की है। सं.

इन दिनों व्हाट्सएप पर एक मैसेज तेज़ी से फॉरवर्ड हुआ है।

गणित में किसी भी संख्या को सम / विषम अथवा वो अपने अंकों के योग से या दो से 'भाज्य है या नहीं' यह कहकर जाना जाता है।

ये कथन मुश्किल से समझ आता है और फिर ग़लत भी है। कोई संख्या सम है या विषम यह तय करने के लिए, उसका इकाई का अंक देखते हैं यदि इकाई का अंक दो से भाज्य है तो संख्या सम होगी। जहाँ संख्या के अंकों का जोड़ का सवाल है, सम संख्या के अंकों का जोड़ सम भी हो सकता है और विषम भी जैसे कि संख्या बारह। यह एक सम संख्या है लेकिन अंकों को जोड़ने पर एक विषम संख्या मिलती है। वहीं 24 भी एक सम संख्या है और इसके अंकों को जोड़ने पर भी सम संख्या ही मिलती है। और ऐसा ही विषम संख्याओं के अंकों के जोड़ में भी होता है।

'लेकिन इस विचित्र संख्या को देखिए...!'

'संख्या 2520' अन्य संख्याओं की तरह वास्तव में एक सामान्य संख्या नहीं है। यह वो संख्या है जिसने विश्व के गणितज्ञों को अभी भी आश्चर्य में डाला हुआ है।

यह विचित्र संख्या 1 से 10 तक प्रत्येक अंक से भाज्य है, चाहे वो अंक सम हो या विषम।

ऐसी संख्या जिसे इकाई तक के किसी भी अंक से भाग देने के उपरान्त शेष शून्य रहे, 'बहुत ही असम्भव / दुर्लभ' है– ऐसा प्रतीत होता है।

अब निम्न सत्य को देखें :

$2520 \div 1 = 2520$

$2520 \div 2 = 1260$

$2520 \div 3 = 840$

$2520 \div 4 = 630$

$2520 \div 5 = 504$

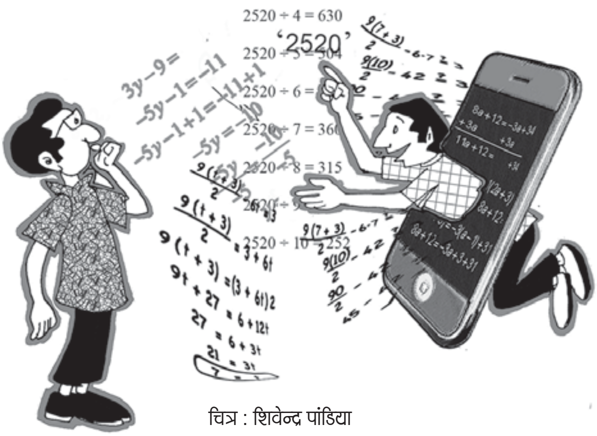
$2520 \div 6 = 420$

$2520 \div 7 = 360$

$2520 \div 8 = 315$

$2520 \div 9 = 280$

$2520 \div 10 = 252$



चित्र : शिवेन्द्र पांडिया

ऐसी संख्या को 'जानने व निकालने की विधि क्या है?' महान गणितज्ञ अभी भी आश्चर्यचकित हैं : '2520 वास्तव में एक गुणनफल है (7 * 30 * 1) का' जो उनके अनुसार इन तीन यादृच्छिक (random) संख्याओं का गुणा करने से बनी है।

उन्हें और भी आश्चर्य हुआ जब यह संज्ञान में लाया जा रहा है कि संख्या 2520 हिन्दू सम्वत्सर के अनुसार 'एकमात्र सही संख्या व वास्तव में उचित' बैठ रही है : 'यह निम्नलिखित गुणनफल' से प्राप्त है :

'सप्ताह के दिन (7) × माह के दिन (30) × वर्ष के माह (12)' = '2520', यही है भारतीय काल गणना की श्रेष्ठता!

यह व्हाट्सएप सन्देश बहुत-से शिक्षकों के समूह में भी घूमता रहा। इसे पढ़ने के बाद अधिकांश को यह 2520 संख्या एकदम विशेष और 786 जैसी पवित्र भी दिखने लगती है। हज़ारों लोगों ने इसे फॉरवर्ड किया और अपने लिए लाइक बँटोरे। कमेंट में हाथ जुड़े वाला नतमस्तक का भाव प्रदर्शन था।

क्या यह संख्या वास्तव में कोई दिव्य संख्या है?

यदि हमने गणित को ख़ुद के लिए नहीं समझा है और संख्याओं के गुणधर्म को आत्मसात (अनुभव) नहीं किया है तो हमारे इस तरह के आश्चर्य बोध के साथ ग़ैर-तार्किक बने रहने की सम्भावनाएँ अधिक हैं। स्कूल में संख्याओं की पहचान एवं उनके आपसी गुणधर्म को जान लेने के बाद भी बच्चे संख्याओं के आपसी रिश्तों को न तो महसूस कर पाते हैं न ही संख्याओं के बीच कोई नया रिश्ता बना पाते हैं। हमने संख्याओं के सीधे रिश्ते के बारे में तो जाना है, जैसे– कोई संख्या दूसरी संख्या से बड़ी है या छोटी, उनमें कितने का अन्तर है या उनमें जोड़, घटाव, गुणा और भाग करने पर क्या आएगा आदि; पर उनके गुँथे हुए रिश्तों पर कम ही सोचा है, जैसे– संख्याओं के पैटर्न, किसी संख्या में दूसरी संख्या की मौजूदगी या किसी एक संख्या से दूसरी संख्या को प्राप्त करने के क्या-क्या रास्ते या तरीक़े हैं। संख्या से खेलने और उन्हें ख़ुद के लिए समझने, जानने के लिए पाठ सामग्री कम ही विकसित की गई है। इसी तरह की समस्या गणितीय सूत्रों के साथ भी है कि सूत्र तो बच्चों और बड़ों को मालूम होते हैं पर उन्हें कहाँ और कैसे इस्तेमाल करना है, यह समझ कम ही विकसित हो पाती है।

कुछ इसी तरह का संक्रमण इस व्हाट्सएप सन्देश को पढ़ने और फैलाने वालों पर हावी है।

यदि हम इसी सवाल को लें कि वो कौन-सी संख्या है जो 1 से लेकर 10 तक सभी संख्याओं से विभाजित है?

तो इसका उत्तर जानने के लिए हमें क्या करना चाहिए। अगर हमने गणित के प्रश्नों को हल करते समय प्रश्नों पर ख़ुद से सोचना और अपनी समझ का इस्तेमाल करते हुए हल करना सीखा है तो यह उन सभी के लिए बहुत ही सरल प्रश्न है। वे तर्क से इसका उत्तर पा सकते हैं। जो संख्या 1 से 10 तक सभी से विभाजित है वह संख्या 1 से 10 तक सभी संख्याओं का गुणज भी होगी। इसके लिए यदि हम 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 = 3628800 कर लें तो 3628800

वह संख्या है जो 1 से 10 तक सभी संख्याओं से विभाजित होगी। पर यह संख्या 1 से 10 तक सभी संख्याओं से विभाजित होने वाली सबसे छोटी संख्या नहीं है। हम ऐसी सबसे छोटी संख्या भी तर्क से प्राप्त कर सकते हैं जो इन दसों संख्याओं से विभाजित हो सके। हम इस छोटी संख्या को प्राप्त करने के एक से अधिक तर्क सोच सकते हैं।

1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 गुणन पर हम ध्यान देते हैं।

सबसे बड़ी संख्या 10 से जो संख्या विभाजित होगी उसकी इकाई में 0 होगा :

1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = 362880

यह संख्या 10 से विभाजित है, अत: हम 10 को छोड़ सकते हैं। यानी 362880 ऐसी संख्या है जो एक से 10 सभी संख्याओं से विभाजित हो जाती है।

अब दूसरी बड़ी संख्या 9 को ध्यान में लेते हैं। हम जानते हैं कि 9 से विभाजित होने वाली संख्याएँ 18, 27, 36, 45, ... आदि 3 से विभाजित होती ही हैं। हम 9 को रखकर संख्या 3 को छोड़ सकते हैं :

1 * 2 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = 120960

अब हमारे पास 120960 ऐसी संख्या है जो 1 से 10 तक सभी संख्याओं से विभाजित हो जाती है।

अब हम 8 पर विचार करते हैं। 8 से विभाजित होने वाली संख्याएँ 16, 24, 32, 40, ... आदि संख्या 4 से भी विभाजित होंगी और 2 से भी। इसलिए हम 8 को रखकर 4 और 2 को भी छोड़ देंगे :

1 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = 15120

हमारे पास 15120 ऐसी संख्या है जो 1 से 10 तक सभी संख्याओं से विभाजित है।

अब हम 7 को रखते हैं। 7 से विभाजित होने वाली संख्याएँ 14, 21, 28, 35, 42, 49, ... आदि में कुछ संख्याएँ तो 2, 3, 4, 5, 6 से विभाजित होती हैं, पर 49, 77, 91 आदि 7 से ही विभाजित हैं। या दूसरे तरीक़े से सोचें कि 7 को छोड़ने से बने गुणनफल से प्राप्त 1 * 5 * 6 * 8 * 9 = 3060 संख्या 7 से पूरी-पूरी विभाजित नहीं है, अत: हमें 7 को रखना ही होगा।

अब हम 6 पर विचार करते हैं। हम संख्या 9, 8 और 7 को ले रहे हैं। हम देखते हैं कि 9 * 8 = 72 या 9 * 8 * 7 = 504 को हम 6 से विभाजित कर सकते हैं। इसलिए हम कह सकते हैं कि 9 * 8 * 7 से विभाजित होने वाली संख्या 6 से भी विभाजित होती है, इसलिए हम 6 को भी छोड़ देंगे। अब हमारे पास 1 * 5 * 7 * 8 * 9 = 2520 है।

हम देखें कि क्या हम 5 को हटा सकते हैं? 9 * 8 * 7 = 504 संख्या 5 से पूरी-पूरी विभाजित नहीं है। अत: हमें 5 को भी शामिल करना होगा।

इस तरह हमारे पास यह 2520 सबसे छोटी ऐसी संख्या है जो 1 से 10 तक सभी संख्याओं से विभाजित हो रही है।

कक्षा 5वीं और 6वीं में शिक्षक बच्चों को लघुत्तम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple — LCM) पढ़ाते हैं। परन्तु अधिकांश पढ़ने और पढ़ाने वाले ख़ुद की सोच और तर्क से अपने लिए ही इसे नहीं समझ रहे हैं। ख़ुद की समझ का इस्तेमाल करने वालों के लिए यह सवाल कि वह छोटी-से-छोटी कौन-सी संख्या है जो 1 से 10 तक सभी संख्याओं की अपवर्त्य है? यह साधारण एलसीएम लेने का प्रश्न है। गणित की कक्षाओं में केवल सूत्र पढ़ने और पढ़ाने वाले यह नहीं सोच पाते कि सूत्र क्या कर रहा है। अब रही बात सप्ताह के 7 दिन, वर्ष के 12 महीने और माह के 30 दिन का गुणा करने की, तो यह काम बड़ी चतुराई से अपने कथन के समर्थन के लिए की गई जुगाड़ है।

हम 9 * 8 * 7 * 5 को 3 * 3 * 4 * 2 * 7 * 5 लिख सकते हैं। और फिर इसे (3 * 2 * 5) (3 * 4) (7) या 30, 12, 7 लिख सकते हैं। यही इसका अन्तिम लक्ष्य और अन्तिम उत्पाद है।

आइए तार्किक ढंग से गणित सोचने का एक और उदाहरण देखते हैं।

इसी तरह का एक और सच्चा उदाहरण देखते हैं। मेरे एक साथी शिक्षकों से गणित पर चर्चाएँ और प्रशिक्षण करते रहते हैं। एक बार उन्हें किसी शिक्षक ने सारे जगत को राम के नाम के बराबर दो अक्षर का सिद्ध करने वाला एक दोहा बताया।

नाम चतुर्गन पंचयुग कृत दौ गुनी अष्ठ भाजी।

सकल चराचर जगत में राम हि राम देखा जी॥

शिक्षक ने कहा कि संसार में किसी के भी नाम में आए अक्षरों को गिन लो, इस संख्या को चार गुना कर दो। अब इसमें 5 जोड़ दो। फिर पूरी संख्या का दो गुना कर दो। अब अष्ठ भाजी अर्थात संख्या को आठ से भाग देना है। ऐसा करने पर हर बार दो ही, यानी राम का नाम ही आएगा।

उन्होंने इस बात को परखा कि चलो, मेरे नाम उमर के साथ देखते हैं। मेरे नाम में तीन अक्षर हैं।

नाम चतुर्गन, 3 * 4 = 12

पंचयुग कृत अर्थात, 5 जोड़ना है। 12+5=17

दो गुनी यानी, 17 * 2 = 34

अष्ठ भाजी यानी 8 से भाग देना है। 34 ÷ 8 = 4 बार भाग गया और शेष 2

यानी राम बचे।

चलो, एक और नाम कैटरीना के लिए इसे आज़माते हैं। कैटरीना यानी नाम की संख्या 4

4 * 4 = 16

16 + 5 = 21

21 * 2 = 42

42 ÷ 8 = शेष 2

उमर को बात तो जम गई और उन्होंने शिक्षक के साथ इसे गणितीय तरीक़े से बताने की कोशिश कि ऐसा क्यों हो रहा है। उन्होंने इसका हल बीजीय व्यंजकों यानी ऐल्जेब्रा के ज़रिए साधा।

कोई भी संख्या x है।

नाम चतुर्गन, x * 4 = 4x

पंचयुग कृत अर्थात, 5 जोड़ना है। 4x + 5

दो गुनी (4x + 5) 2 = 8x + 10

अष्ठ भाजी यानी, 8 से भाग देना है। 8x ÷ 8 + 10 ÷ 8

8x में 8 का भाग पूरा-पूरा जाएगा और हर बार 10 में 8 का भाग देने पर 2 ही बचेगा।

उन्होंने शिक्षक की बात को अपने बीजगणितीय ज्ञान से पुष्ट कर दिया और इसपर *संदर्भ* के 106वें अंक में एक लेख लिखा। इस लेख को पढ़कर मुझे लगा कि इस बात का बीजीय व्यंजक के ज़रिए सामान्यीकरण करने के पहले संख्याओं के साथ जो मिथक शिक्षक ने जोड़ रखा है उसपर बात करनी चाहिए।

इसे बीजीय व्यंजक से समर्थन करने के पहले केवल तर्क के आधार पर बात समझना ज़रूरी है।

"किसी संख्या का चार गुना करके उसमें पाँच जोड़ना और फिर प्राप्त संख्या को दो गुना करके आठ का भाग देना", इसका मतलब है



चित्र : शिवेन्द्र पांडिया

कि किसी संख्या के आठ गुने में दस जोड़कर आठ का भाग देना। अर्थात, किसी भी संख्या के आठ गुने में आठ का पूरा-पूरा भाग जाएगा और दस में आठ का भाग देने पर दो शेष बचेगा, यही हम कर रहे हैं इस दोहे में। हम इस तरह से संख्याओं पर संक्रियाओं के कई तरह के संयोजन बना सकते हैं और वांछित संख्या ला सकते हैं।

अगर यह जोड़ व गुणा अन्त में दो अंकों की संख्या ला सकता है तो कोई और जोड़ व गुणा तीन अक्षर की भी संख्या ला सकता है। थोड़ी देर संख्याओं के साथ माथापच्ची करने के बाद मुझे इस तरह का हल मिल गया। फिर मैंने उमर को चिट्ठी लिखी कि मैं सकल जगत के सारे नामों में रहीम ही रहीम यानी संख्या तीन ला सकता हूँ। इसके लिए दोहा या श्लोक कुछ इस प्रकार हो सकता है :

नाम साढ़े तीनर्गन पंचयुग कृत दौ गुनी सप्त भाजी।

सकल चराचर जगत में रहीम हि रहीम देखा जी।।

इस दोहे के अनुसार, चलिए सबसे पहले मुकेश में रहीम ढूँढ़ते हैं। मेरे नाम में तीन अक्षर हैं। तीन का साढ़े तीन गुना करके उसमें पाँच जोड़कर दो गुना करना।

अर्थात, संख्या का 3.5 गुना (3 * 3.5)=10.5

इस संख्या में 5 जोड़ना, 10.5 + 5 = 15.5

इस संख्या का दो गुना करना, 15.5*2=31

अब प्राप्त संख्या में सात का भाग देना है, यानी 31 ÷ 7

तीन शेष बचेगा अर्थात मुकेश में तो रहीम मिल गए हैं।

अब चलो मोहम्मद उमर में ढूँढ़ते हैं। मोहम्मद उमर में आठ अक्षर हैं।

(8 * 3.5 + 5) 2 = (28 + 5) 2 = 66

66 में 7 का भाग देने पर भी तीन शेष बचा तो मोहम्मद उमर में भी रहीम हैं।

सामान्य जोड़, घटाव, गुणा और भाग से समझ आ जाने के बाद हम इन कथनों का सामान्यीकरण कर सकते हैं और इसके लिए बीजगणित के निरूपण या चर संख्याओं का उपयोग कर गणितीय कथन लिख सकते हैं, जैसे– यहाँ (3.5x + 5) 2 ÷ 7 = 3

यहाँ x की जगह हम कोई भी संख्या डाल दें, उत्तर में 3 ही शेष आएगा।

गणित में तो शुरुआती कक्षाओं से ही संख्याओं के साथ भाषा का इस्तेमाल बहुत कम है और जो है वो इस समय के बच्चों के पास मौजूद भाषा के शब्दों से बिलकुल जुदा है। हासिल लेना, घटाना, गुणा करना, भाग देना, आदि यांत्रिक शब्दों की तरह आते हैं जो संख्या और चिह्न के प्रतिफल को उत्पादित तो करते हैं, पर अर्थ या अनुभव नहीं देते।

जब आप आम समझ से हटकर कोई बात रख रहे हों तो उस बात का स्रोत उजागर करने से वह बात, व्यक्ति की श्रेष्ठता या पाण्डित्य से अलग, ज्ञान व्यवहार की बात की तरह ही समझी जाए जिसपर सबको पद और डिग्रियों को भुलाकर संवाद करने का हक़ सम्भव हो। तो सोचिए और संवाद कीजिए। आँख मूँदकर विश्वास (अन्धविश्वास) मत कीजिए।

मुकेश मालवीय पिछले दो दशक से भी ज़्यादा समय से स्रोत शिक्षक के रूप में सरकारी और ग़ैर–सरकारी भूमिकाओं में सक्रिय हैं। कक्षा अनुभवों को लेकर सतत लिखते रहते हैं। वर्तमान में अनुसूचित जाति विकास विभाग के शासकीय आवासीय ज्ञानोदय विद्यालय, होशंगाबाद (मध्यप्रदेश) में शिक्षक पद पर कार्यरत हैं।

सम्पर्क : mukeshmalviya15@gmail.com